

dr inż. JADWIGA PISULA, dr inż. MIECZYŚLAW PŁOCICA
Politechnika Rzeszowska
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Katedra Konstrukcji Maszyn
e-mail: jpisula@prz.edu.pl, mplocica@prz.edu.pl

ZASTOSOWANIE MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO I ŚRODOWISKA CAD W PROJEKTOWANIU PRZEKŁADNI STOŻKOWYCH

Streszczenie

Przedstawiono sposób matematycznego modelowania uzębień i zazębnień przekładni stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba z zębami o zmiennej wysokości. Zaprezentowane przykłady powierzchni bocznych zębów zębniaka i koła otrzymanych jako modele matematyczne i modele CAD wykonano dla wybranej przekładni oraz ustawień bazowych obrabiarki 116G firmy Gleason dla metody SGT (Spiral Generated Tilt).

Wysokie wymagania co do nośności, niezawodności i trwałości przekładni stożkowych sprawiają, że już na etapie projektowania należy przeprowadzać analizy pozwalające wyznaczyć podstawowe wskaźniki jakości przekładni, czyli wykresy ruchowe i wykresy śladu współpracy. Podstawą do tego jest wyznaczenie powierzchni współpracujących zębów uzyskiwanych w wyniku skomplikowanych metod obróbki. W Katedrze Konstrukcji Maszyn Politechniki Rzeszowskiej opracowano dwie uzupełniające się metody modelowania procesu obróbki kół stożkowych: model matematyczny dyskretny oraz model bryłowy. Pierwsza metoda odwzorowuje geometrię i kinematykę procesu za pomocą zależności matematycznych (metoda wektorowo-macierzowa), czyli z użyciem modelu matematycznego, którego rezultaty w zależności od stopnia złożoności metody mogą mieć postać równań czynnych powierzchni zębów [2] w prostszych przypadkach analitycznych, lub dyskretną wyznaczoną przez siatki punktów odpowiadającą zadanej siatce odniesienia (w przypadku bardziej złożonych metod obróbki). Druga metoda sprowadza się do symulacji obróbki w środowisku CAD, polegającej na sukcesywnym wykonywaniu operacji logicznych odejmowania pomiędzy bryłami przedmiotu obrabianego a narzędziem.

W niniejszym artykule zaprezentowane zostaną rezultaty (w postaci dyskretnej) zastosowania modelu matematycznego obróbki koła i zębniaka metodą SGT na obrabiarce 116G firmy Gleason. Metoda SGT jest jedną z najbardziej skomplikowanych metod obróbki – stosowane jest pochylenie osi głowicy narzędziowej. Opracowany model jest uniwersalny, ponieważ pozwala uwzględnić też inne metody obróbki możliwe na obrabiarce 116G: SGM, SFT, SFM, SDH [3, 4].

Na model matematyczny składa się zestaw układów współrzędnych przedstawionych na rys.1, odzwierciedlający wzajemne związki geometryczne i kinematyczne pomiędzy podstawowymi zespołami obrabiarki, poczynając od narzędzia S_t aż po przedmiot obrabiany $S_{1(2)}$. Związki te są wyrażone za pomocą macierzy transformacji $M_{tt}(\psi_t)$. Układ S_m to układ odniesienia nieruchomy (bazowy), związany z korpusem obrabiarki; S_t , S_f - układy odniesienia ruchome sztywno związane odpowiednio z narzędziem i nacinanym kołem; pozostałe układy są pomocnicze, określają położenie elementów przekładni lub zmianę położenia podczas obróbki. Narzędziem stosowanym do obróbki członów przekładni stożkowej jest głowica czołowa, której krawędzie skrawające noży leżą na stożkach współśrodkowych z osią głowicy. W przypadku szlifierek jest to ściernica garnkowa. Parametryczny zapis powierzchni działania narzędzia, w układzie związanym z narzędziem S_t , przedstawiono za pomocą równania (1), natomiast jednostkowy wektor normalny do tych powierzchni podaje wzór (2):

$$\mathbf{r}_t(s_t, \theta_t) = \begin{bmatrix} \cos \theta_t \cdot (r_i \pm s_t \sin \alpha_i) \\ \sin \theta_t \cdot (r_i \pm s_t \sin \alpha_i) \\ -s_t \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

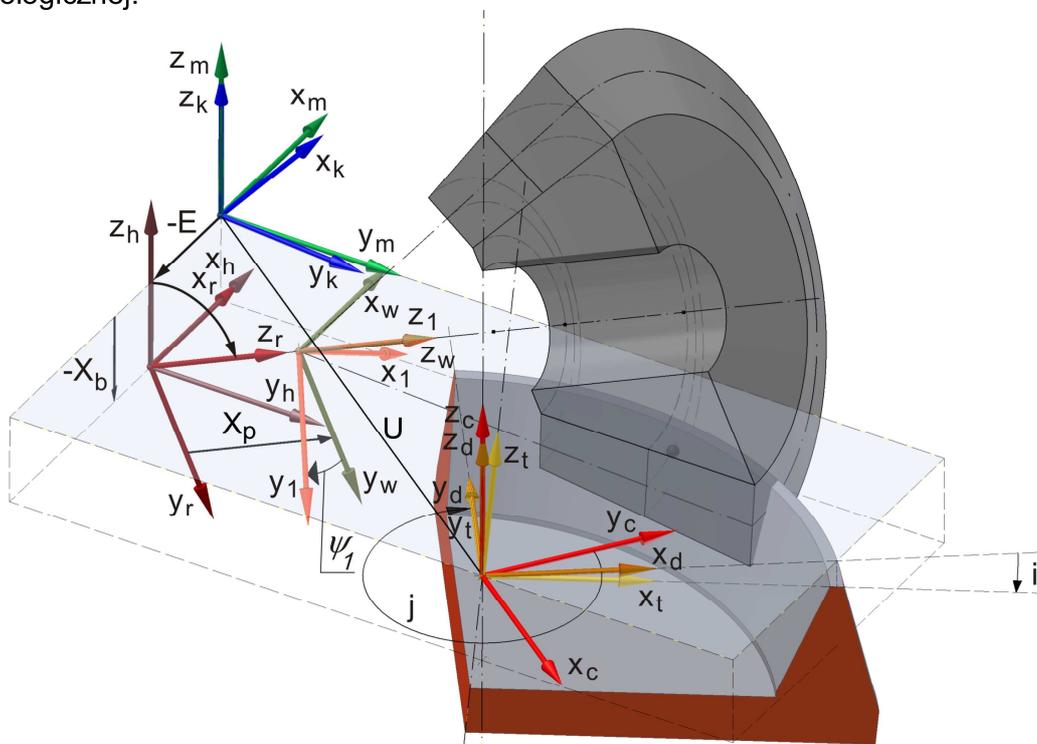
$$\mathbf{n}_t(\theta_t) = \begin{bmatrix} -\cos \theta_t \cdot \cos \alpha_i \\ -\sin \theta_t \cdot \cos \alpha_i \\ \mp \sin \alpha_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie: s_t, θ_t - parametry związane odpowiednio z długością krawędzi skrawającej oraz z tworzeniem powierzchni obrotowej stożkowej; α_i, r_i - kąt zarysu noży i promień głowicy nożowej ($i = wk, wp$) indeks „wk” odnosi się do obróbki wklęsłej strony boku zęba nożami zewnętrznymi narzędzia, indeks „wp” odnosi się do obróbki wypukłej strony boku zęba nożami wewnętrznymi, (dla noży zewnętrznych obowiązuje znak „górny”, dla wewnętrznych znak „dolny”).

Zapis powierzchni bocznej zęba, nacinanej metodą obwiedniową, uzyskuje się z rozwiązania układu równań (3), w skład którego wchodzi równanie rodziny powierzchni działania narzędzia oraz równanie zazębienia, określone na bazie kinematycznej teorii obwiedni zaproponowanej przez F. V. Litvina [1].

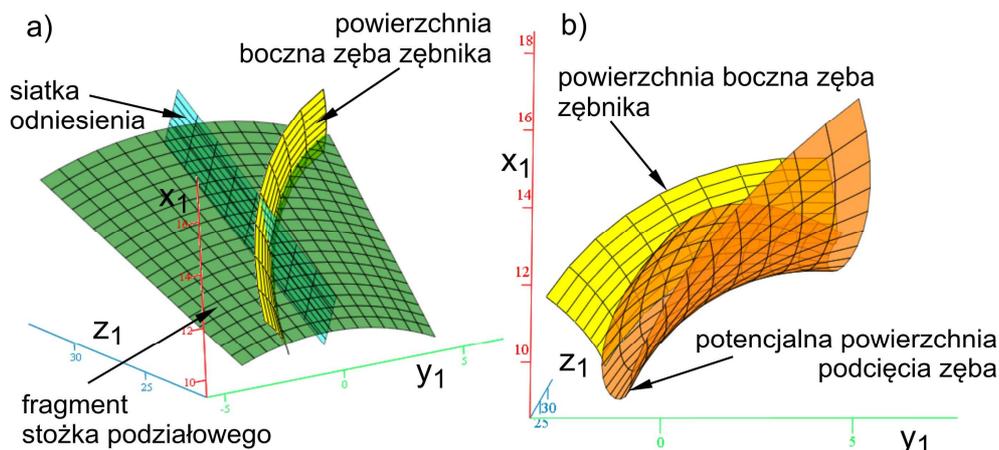
$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(s_t, \theta_t, \psi_t) = \mathbf{M}_{1t}(\psi_t) \cdot \mathbf{r}_t(s_t, \theta_t) \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{tt}(s_t, \theta_t, \psi_t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

gdzie: ψ_t - parametr ruchu, \mathbf{n}_1 - jednostkowy wektor normalny do powierzchni narzędzia określony w układzie S_1 , $\mathbf{v}_1^{tt}(s_t, \theta_t, \psi_t)$ - prędkość względna narzędzia względem koła w układzie S_1 , $\mathbf{r}_t(s_t, \theta_t)$ - równanie wektorowe powierzchni działania narzędzia w układzie S_1 , $\mathbf{M}_{1t}(\psi_t)$ - macierz przekształceń stanowiąca iloczyn macierzy odwzorowujących pojedyncze obroty i przesunięcia pomiędzy wprowadzonymi układami w modelu przekładni technologicznej.

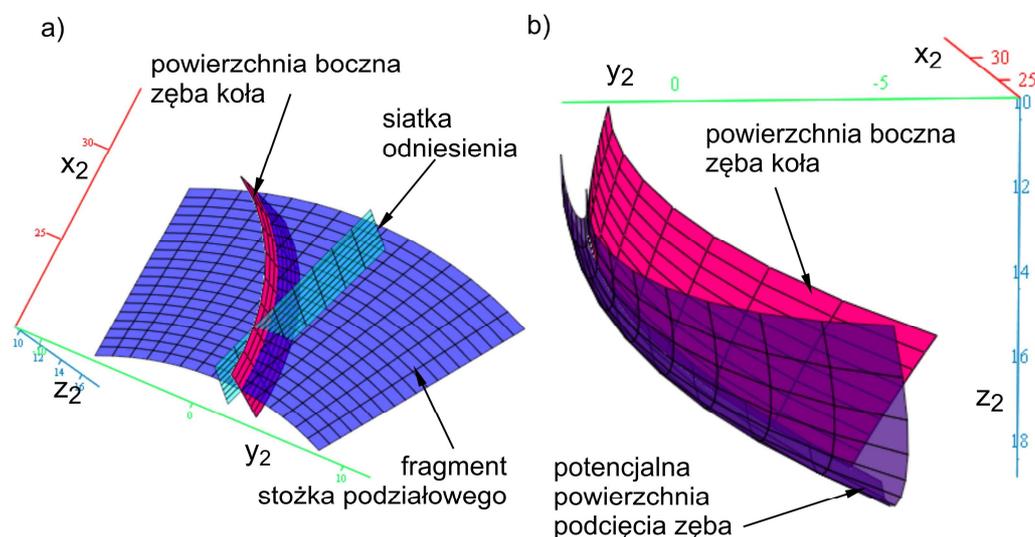


Rys.1. Zespół układów współrzędnych tworzących model matematyczny przekładni technologicznej

Ze względu na rozbudowany system układów współrzędnych, modelujących przekładnię technologiczną, do którego wprowadza się aż dziewięć parametrów ustawień bazowych obrabiarki (nie biorąc pod uwagę geometrii narzędzia i obrabianego koła), równania ząbienia nie daje się rozwiązać w sposób analityczny. W tym przypadku otrzymywana powierzchnia boczna zęba koła stanowi zbiór punktów, odpowiednio indeksowanych, będących rozwiązaniem numerycznym układu (3). Współrzędne tych poszukiwanych punktów odpowiadają współrzędnym punktów rozmieszczonych na siatce odniesienia usytuowanej w przekroju osiowym nacinanego koła w granicach czynnej wysokości zęba. Na uzyskanym zbiorze punktów stosując interpolację rozpinana jest powierzchnia. Otrzymana w ten sposób interpolowana powierzchnia boczna zęba podlega dalszej analizie w modelu przekładni konstrukcyjnej.



Rys. 2. a) Wygenerowana wklęsła powierzchnia boczna zębika na fragmencie stożka podziałowego na tle siatki odniesienia, b) Powierzchnia boczna zębika wraz z powierzchnią generowaną wierzchołkiem naroża noża



Rys. 3. a) Wygenerowana wypukła powierzchnia boczna koła na fragmencie stożka podziałowego na tle siatki odniesienia, b) Powierzchnia boczna koła wraz z powierzchnią generowaną wierzchołkiem naroża noża

W artykule przedstawiono przykładowe wyniki dla nacinanej pary stożkowej, dla której wybrane wielkości zawarto w tabeli 1. Parametry ustawcze (bazowe) obrabiarki 116G a także geometrię narzędzia podaje tabela 2. Dane te uzyskano dzięki współpracy z pracownikami Instytutu Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej. Na rys. 2.

zaprezentowano otrzymaną wklęsłą powierzchnię boku zęba zębniaka o prawym kierunku linii zęba wraz z fragmentem dna wrębu wykonywanym wierzchołkiem noża. Jest to potencjalna powierzchnia podcięcia zęba. W taki sam sposób uzyskano powierzchnię boczną zęba koła wypukłą o lewym kierunku linii zęba wraz z dnem obrabianym wierzchołkiem narzędzia rys. 3. Otrzymane powierzchnię zębniaka i koła poddano analizie za pomocą modelu matematycznego przekładni konstrukcyjnej.

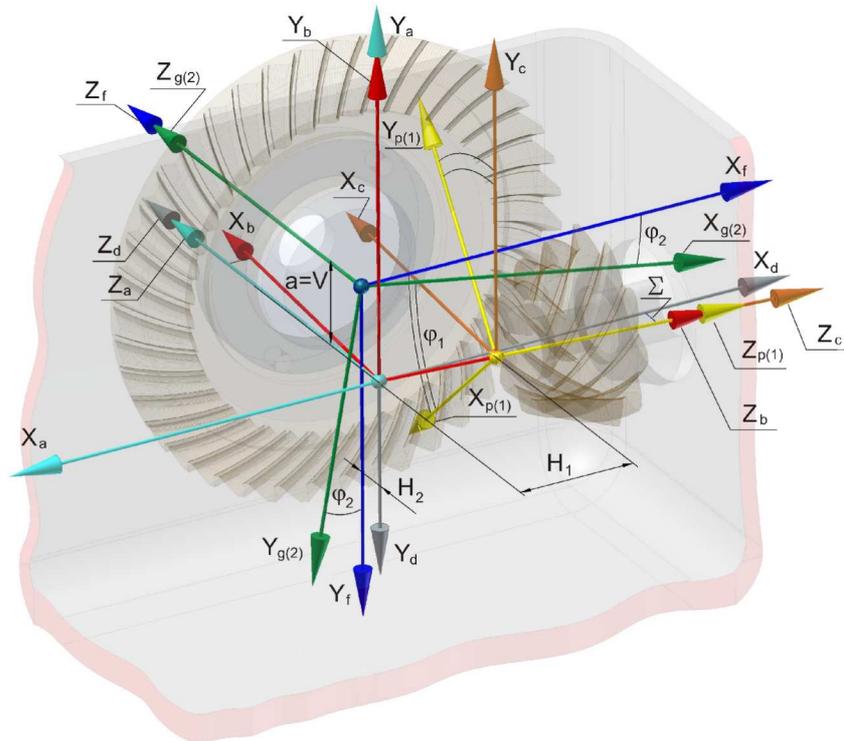
Tabela. 1.

Wybrane dane przekładni stożkowej		
z_1	Liczba zębów zębniaka	17
z_2	Liczba zębów koła	35
L_{zz}	Kierunek pochylenia linii zęba zębniaka	prawy
β	Kąt pochylenia linii zęba	33°15' 0"
Σ	Kąt skrzyżowania osi	90°
α	Średni kąt zarysu noży głowicy	20°
b	Szerokość wieńca zębatego	12 mm
-	Rodzaj zbieżności zęba	TRL

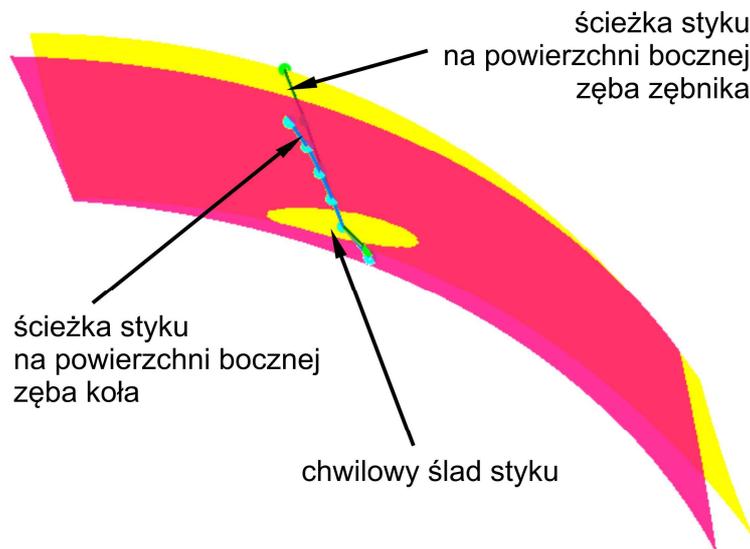
Tabela.2

Ustawienia bazowe obrabiarki do obróbki zębniaka (wk) i koła (wp)			
q	ustawienie kątowe głowicy	43,9 [°]	38,9 [°]
U	ustawienie promieniowe głowicy	25,538 [mm]	25,368 [mm]
E	przesunięcie hipoidalne	0,212 [mm]	0 [mm]
δ_m	kąt skręcenia wrzeciona P.O.	25,3833 [°]	63,25 [°]
X_p	ustawienie osiowe wrzeciona P.O.	-0,156 [mm]	0 [mm]
X_b	ustawienie stołu wrzeciona P.O.	-1,213 [mm]	-1.660 [mm]
i	kąt pochylenia wrzeciona narzędzia (tilt)	0,7 [°]	0 [°]
j	kąt skręcenia płaszczyzny tiltu (swivel)	10,25 [°]	0 [°]
i_{odt}	przełożenie odtaczania	0,436922	0,899604
Geometria narzędzia			
D_0	średnica głowicy nożowej	38,862 [mm]	38,100 [mm]
W_2	szerokość wierzchołka noża	0,508 [mm]	0,762 [mm]
R_{02}	promień zaokrąglenia naroża	0,381 [mm]	0,381 [mm]
α_{wk}	kąt zarysu noża (zewnątrznego)	20 [°]	20 [°]
α_{wp}	kąt zarysu noża (wewnętrznego)	20 [°]	20 [°]

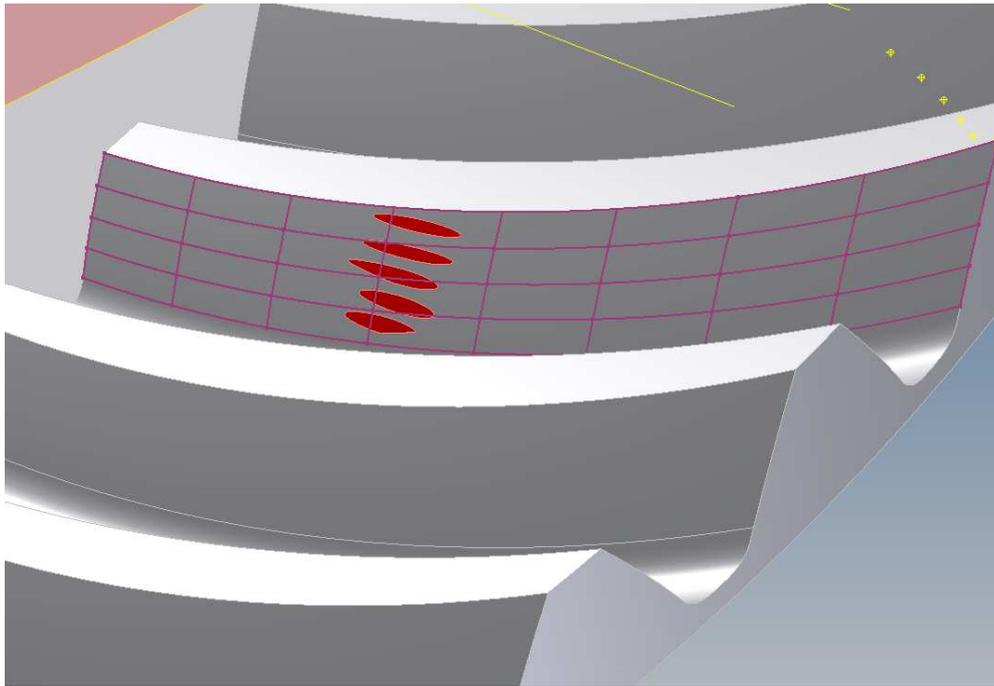
Model matematyczny przekładni konstrukcyjnej pozwala na ocenę poprawności współpracy badanej przekładni. Aby poszerzyć możliwości tej analizy, w modelu przekładni konstrukcyjnej uwzględniono możliwe błędy montażowe (przesunięcie hipoidalne, przesunięcie członów przekładni wzdłuż osi obrotu, odchylenia kąta skrzyżowania osi). Na rys. 4. zaprezentowano zespół układów współrzędnych tworzących model. Na rys. 5. przedstawiono chwilowy ślad styku sprzężonych powierzchni bocznych zębniaka i koła oraz wygenerowaną ścieżkę styku na powierzchni zębniaka i koła. Model CAD omawianej w artykule przekładni konstrukcyjnej potwierdza położenie chwilowych śladów współpracy jak i ścieżki styku otrzymanej numerycznie (rys. 6). Model matematyczny przekładni technologicznej umożliwia również wygenerowanie powierzchni sprzężonej zęba zębniaka naciętej kołem traktowanym jako narzędzie. Współpraca powierzchni bocznej sprzężonej zęba zębniaka z powierzchnią boku zęba koła zapewnia styk liniowy (rys. 7). Powierzchnia boczna sprzężona stanowi powierzchnię odniesienia do powierzchni otrzymywanej przy wprowadzeniu ustawień bazowych obróbki. Wykresy odchylenia powierzchni bocznej zębniaka od powierzchni sprzężonej to wykresy „ease off”. Wykresy te stanowią cenną wskazówkę dla projektanta.



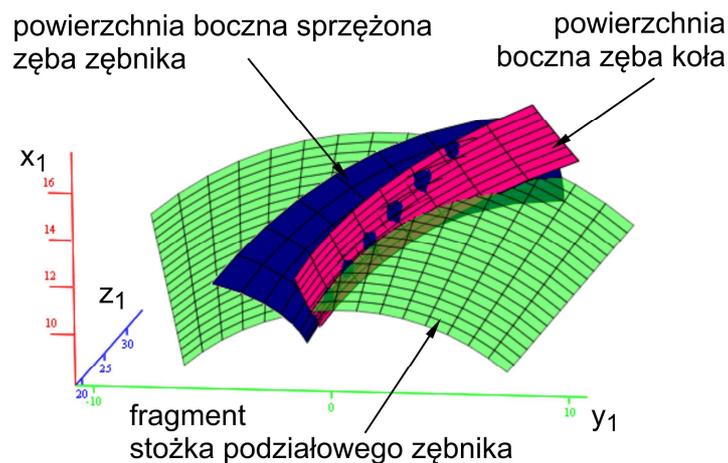
Rys. 4. Zespół układów tworzący model matematyczny przekładni konstrukcyjnej uwzględniający odchyłki montażowe



Rys. 5. Sprężenie powierzchni otrzymanych numerycznie – widoczny chwilowy ślad styku oraz ścieżki styku



Rys. 6. Sumaryczny ślad styku na powierzchni bocznej koła potwierdzający wyniki otrzymane numerycznie.



Rys. 7. Styk liniowy (w postaci przenikających się plam) powierzchni bocznej sprzężonej zębniaka i koła

Weryfikacja powierzchni uzyskanych w CAD z powierzchniami otrzymanymi numerycznie potwierdza zbieżność otrzymanych wyników. Nałożenie powierzchni rozpiętej na siatce punktów, których współrzędne otrzymano jako rozwiązanie numeryczne układu równań (3), z powierzchnią boczną uzyskaną w modelu CAD daje maksymalne odchylenie powierzchni dla zębniaka 0,0013 mm, a dla koła 0,0003mm.

Dla poprawy jakości przekładni stożkowych korzystne jest analizowanie parametrów współpracy na etapie projektowania. Taką możliwość dają modele matematyczne przekładni technologicznej i konstrukcyjnej jak i modele otrzymane na drodze symulacji obróbki w środowisku CAD. Model matematyczny pozwala na sprawdzenie możliwości wystąpienia podcięcia zęba, określenie położenia i wielkości śladu współpracy, wyznaczenie ścieżki styku, wygenerowanie wykresów nierównomierności ruchu oraz wykresów „ease off”. Model CAD umożliwia szybką weryfikację otrzymanych powierzchni za pomocą modelu matematycznego dyskretnego.

Badania realizowane w ramach Projektu Kluczowego Nr POIG.0101.02-00-015/08 „Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym” w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (POIG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju regionalnego

Literatura:

- [1]. F. L. LITVIN., A. FUENTES: Gear geometry and applied theory. Second edition. Cambridge University Press, New York, 2004;
- [2]. A. MARCINIEC: Synteza i analiza zazębień przekładni stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2002;
- [3]. H. J. STADTFELD: Advanced Bevel Gear Technology. Manufacturing, Inspection and Optimization. The Gleason Works, 2000;
- [4]. Z. WÓJCIK: Przekładnie stożkowe systemu Gleason. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2004;

THE APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELLING AND CAD TO DESIGN OF BEVEL GEAR

Summary

In paper presents a method of mathematical modeling of gear teeth and spiral bevel gear with the teeth of varying height. The presented examples of the side surfaces of the teeth of pinion and wheel received as mathematical models and CAD models were performed for the selected gear and the basic machine settings Gleason's 116G for the method of SGT (Spiral Generated Tilt).

Financial support of Structural Funds in the Operational Programme - Innovative Economy (IE OP) financed from the European Regional Development Fund - Project No POIG.0101.02-00-015/08 is gratefully acknowledged.